零条件をみたす非線形項を持つ半線形波動方程式系の解の特異性伝播について (スペクトル・散乱理論とその周辺)

伊藤, 真吾

数理解析研究所講究録
第 1696 巻 2010 年 32-50

零条件をみたす非線形項を持つ半線形波動方程式系の解の特異性伝播について

東京理科大学理学部数学科 伊藤真吾 (Shingo Ito)
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Science University of Tokyo

1 導入

本稿は [9] に基づくものである．次のような半線形波動方程式系において，解の特異性伝播を考える:

$$\begin{cases} \Box u=A(u,v,Du,Dv), \\ \Box v=B(u,v,Du,Dv), \\ u(0,x)=u_{0}(x),\ \partial_{t}u(0,x)=u_{1}(x), \\ v(0,x)=v_{0}(x),\ \partial_{t}v(0,x)=v_{1}(x). \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで，$(t,x)\in \mathbb{R}^{2}$, $u(t,x)$, $v(t,x)$,$u_{0}(x)$,$u_{1}(x)$,$v_{0}(x)$,$v_{1}(x)$ は実数値関数，$\Box\equiv\partial_{t}^{2}-\partial_{x}^{2}$ である．また，非線形項は，

$$\begin{aligned} & A(u,v,Du,Dv) \\ & \quad =h_{1}(u,v)Q_{0}(u,u)+h_{2}(u,v)Q_{0}(u,v)+h_{3}(u,v)Q_{0}(v,v)+h_{4}(u,v)Q_{1}(u,v) \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} & B(u,v,Du,Dv) \\ & \quad =h_{5}(u,v)Q_{0}(u,u)+h_{6}(u,v)Q_{0}(u,v)+h_{7}(u,v)Q_{0}(v,v)+h_{8}(u,v)Q_{1}(u,v) \end{aligned} \tag{1.3}$$

で表される零条件 (定義 1.6 参照) を満たす項であり，$h_{j}(u,v)(j=1,2,\ldots,8)$ は u と v の実数係数多項式，$Q_{0}(f,g)$, $Q_{1}(f,g)$ は零形式 ((1.5) (1.6) 参照)

$$Q_{0}(f,g)=(\partial_{t}f)(\partial_{t}g)-(\partial_{x}f)(\partial_{x}g),$$

$$Q_{1}(f,g)=(\partial_{t}f)(\partial_{x}g)-(\partial_{x}f)(\partial_{t}g)$$

とする．また，$3/2<s<2$ とし，$u_{0},v_{0}\in H^{s}(\mathbb{R})$，$u_{1},v_{1}\in H^{s-1}(\mathbb{R})$ と仮定する．

まずは，本研究の背景を紹介しよう．特異性の伝播とは，双曲型偏微分方程式の性質の一つで，初期値の特異性が時間の経過と共に方程式固有の法則で伝わっていく現象のことである．特異性伝播の問題は，1960 年代から線形の方程式に関する研究が，更に 1970 年代後半以降には非線形の方程式に関する研究が行われている．ま

ず，線形の方程式に関する既存の結果を紹介する．そのために，Hörmander [6] にしたがって波面集合 (wave front set) を導入する．フーリエ解析で知られているように，関数 $u(x)$ が $x_0 \in \mathbb{R}^n$ で C^∞ 級であるための必要十分条件は $\phi(x_0) \neq 0$ を満たすある $\phi(x) \in C_0^\infty$ が存在し，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して N に依存するある定数 C_N が存在して，

$$\langle\xi\rangle^N |\widehat{\phi u}(\xi)| \leq C_N$$

が成り立つことである．ここで，$\langle\xi\rangle = \sqrt{1+|\xi|^2}$ かつ $\hat{u} = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix\cdot\xi}u(x)dx$ である．このことを方向別に精密化したものが波面集合である．

定義 1.1 (波面集合) $u \in \mathcal{S}'$ とする．$(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n/\{0\})$ が u の波面集合に入らないとは，ξ_0 の錐近傍 (conic neighborhood) K と $\phi(x_0) \neq 0$ を満たす $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ が存在し，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して N に依存するある定数 C_N が存在して，

$$\langle\xi\rangle^N \chi_K(\xi)|\widehat{\phi u}(\xi)| \leq C_N$$

が成り立つことである．このことを $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$ と書く．ただし，$\chi_K(\xi)$ は K の特性関数，つまり，$\xi \in K$ のとき $\chi_K = 1$，$\xi \notin K$ のとき $\chi_K = 0$ を満たす関数である．

(注意) 変数 $\xi \in \mathbb{R}^n/\{0\}$ は方向を表す変数である．また集合 $K \in (\mathbb{R}^n_\xi \backslash \{0\})$ が錐集合であるとは，任意の $t > 0$ に対して $\xi \in K$ ならば $t\xi \in K$ が成り立つことであり，錐近傍とは錐集合状の近傍のことである．

次に，特異性が伝播する道筋となる零陪特性曲線 (null bicharacteristic) を紹介する．

定義 1.2 (零陪特性曲線) $p(x, \xi)$ を微分作用素 $P(x, D_x)$ の特性多項式とする．$p(x_0, \xi_0) = 0$ を満たす点 (x_0, ξ_0) に対して，その点を通る零陪特性曲線とは

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial p}{\partial \xi}(x, \xi),\ \frac{d\xi}{ds} = -\frac{\partial p}{\partial x}(x, \xi) \ \text{かつ}\ \ x(0) = x_0,\ \xi(0) = \xi_0$$

で定義される積分曲線 $x(s)$, $\xi(s)$ である．

例 1.3 $\Box$ の零陪特性曲線 Γ を考える．特性多項式は $p(t, x, \tau, \xi) = \tau^2 - \xi^2$ なので，$dt/ds = 2\tau$, $dx/ds = 2\xi$, $d\tau/ds = 0$, $d\xi/ds = 0$ である．従って，$|\tau_0| = \pm|\xi_0| \neq 0$ である点 $(0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ を通る $\Box$ の零陪特性曲線は，$t = 2\tau s$, $x = 2\xi s + x_0$, $\tau = \tau_0$, $\xi = \xi_0$ であり，s を消去すると，直線 $x = x_0 - (\xi_0/\tau_0)t$ を得る．

Hörmander [6] は，線形波動方程式 $\Box u = 0$ に関して，解 u の波面集合 $WF(u)$ は $\Box$ の零陪特性曲線に沿って伝播することを示した．すなわち，$(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^{n-1}) \times ((\mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}_\xi^{n-1})\backslash\{0\})$ の 1 点 $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ が $WF(u)$ に含まれていれば，この点を通る零陪特

性曲線 (の u の定義域内での連結成分) がすべて $WF(u)$ に属するということである．しかし，このことを非線形の方程式で考えた場合，一般にはこのような結果を得ることはできない．1979 年，1980 年に J.Rauch 氏，M.Reed 氏らによって，$\Box u = f(u)$ なる方程式の解 u は，線形の場合に得られる箇所以外にも新たな特異性を持つことが示された．この新しい特異性は初期値の特異性よりは弱いものであることが，1980 年，1981 年に J.M.Bony 氏, M.Beals 氏, M.Reed 氏らによって示された。それに伴って，解 u に仮定する正則性の条件をより弱いものにすると，非線型方程式の場合にも，線形の場合と似た現象が起きることがわかり，それに関する様々な結果が示された．そこで用いられたものが以下で定義される超局所ソボレフ空間である．

定義 1.4 (局所ソボレフ空間) $u \in \mathcal{S}'$，Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．$u \in H^s_{loc}(\Omega)$ とは，$\phi(x_0) \neq 0$ を満たす $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ が存在して，

$$\langle \xi \rangle^s |\widehat{\phi u}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つことである．

波面集合のときと同様に，このことを方向別に精密化したものが超局所ソボレフ空間である。

定義 1.5 (超局所ソボレフ空間) $u \in \mathcal{S}'$ が (x_0, ξ_0) で超局所的に H^r 級であるとは，ξ_0 の錐近傍 K と $\phi(x_0) \neq 0$ を満たす $\phi \in C_0^\infty$ が存在して，

$$\langle \xi \rangle^r \chi_K(\xi) |\widehat{\phi u}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

をみたすことである．これを $u \in H^r_{ml}(x_0, \xi_0)$ と書く．

超局所ソボレフ空間を用いた特異性伝播については，次のような結果が知られている．波動方程式

$$\Box u = F(u, Du) \quad (F \in C^\infty) \tag{1.4}$$

の解 u が $H^s_{loc}(\Omega) \cap H^r_{ml}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ に属すると仮定したとき，s と r が適切な範囲内の値であれば、線形の場合と同様に、点 $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ を通る零陪特性曲線 (の u の定義域内での連結成分上の点) がすべて H^r_{ml} に属する．これを成立させる s と r の範囲は，次のようにたびたび改良されてきた．

- 1981 J.M.Bony [5] $n/2 + 1 < s < r < 2s - n/2 - 1$
- 1982 M.Beals and M.Reed [4] $n/2 + 1 < s < r < 2s - n/2 - 1$
- 1985 M.Beals [3] $n/2 + 1 < s < r < 3s - n - 2$
- 1991 L.Linqi [12] $n/2 + 1 < s < r < 3s - n - 1$

ここで，n は時空間の次元を表す．この問題において，非線形項の構造にある種の制限を課すことにより，さらに s，r の条件を緩めることが考えられる．S.Ito [8] では，非線形項 $F(u, Du)$ に零条件を仮定したときに，上述の特異性伝播が $n/2 < s < r \leq 3s - n + 1$ で成立することを示した．零条件は Klainerman[10] によって，ある種の非線形波動方程式が時間大域解を持つための十分条件として与えられた．現在でも，この零条件を改良し，その条件の下で時間大域解，時間局所解の存在を示す研究が多くの数学者によって研究されており，様々な結果が得られている．

定義 1.6 (零条件) $F(u, v)$ は原点の近傍で滑らかな実数値関数とする．ここで，変数 u, v は $I = 1, 2, \ldots, p$, $i = 1, \ldots, n$ に対し，$u = (u^I)$，$v = (v_i^I)$ とし，$(u, v) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{np}$ である．このとき，$F(u, v)$ が零条件を満たすとは，任意の (u, v) と $X_1^2 - \sum_{i=2}^n X_i^2 = 0$ を満たす任意の $X = (X_1, \cdots, X_n)$ に対して，

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial v_i^I \partial v_j^J} X_i X_j = 0$$

が成り立つことである．

$u^I(t, x) = u^I(t, x_1, \ldots, x^{n-1})$ とする．$F(u, Du)$ が零条件を満たすとき，Du については 2 次以下で，Du の 2 次の項は次の零形式 (null form)

$$Q_0(u^I, u^J) = (\partial_t u^I)(\partial_t u^J) - (\nabla_x u^I) \cdot (\nabla_x u^J) \tag{1.5}$$

$$Q_{ab}(u^I, u^J) = (\partial_a u^I)(\partial_b u^J) - (\partial_b u^I)(\partial_a u^J) \quad (1 \leq a < b \leq n) \tag{1.6}$$

の 1 次結合で表される．ただし，$\partial_n = \partial_t$, $\partial_i = \partial_{x_i}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ とする．

本稿では，連立方程式での解の特異性伝播を考える．この場合，単独の方程式に用いた，ある変換を用いて既存の結果に帰着させる手法 ([8] を参照) が使えない．そこで，この問題を避けるために S. Klainerman-M. Machedon [11] によって用いられたタイプの関数空間で解を構成し，その関数空間の中で M. Beals [3] のアイディアを用いて特異性の伝播を考察する．関数空間 X^s を

$$X^s = \left\{ f(t,x) \in \mathcal{S}' \;\middle|\; \begin{array}{l} a(t)f(t,x) \in H^s(\mathbb{R}^2) \text{ for } \forall a(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \\ f|_{t=0} \in H^s(\mathbb{R}),\ \partial_t f|_{t=0} \in H^{s-1}(\mathbb{R}), \\ \|\Box f(t,x)\|_{X_1^{s-1}} < \infty \end{array} \right\} \tag{1.7}$$

と定義する．ただし，$\|f(t,x)\|_{X^s} = \|f|_{t=0}\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|\partial_t f|_{t=0}\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} + \|\Box f(t,x)\|_{X_1^{s-1}}$ かつ $\|F(t,x)\|_{X_1^s} = \|\langle D_x \rangle^s F(t,x)\|_{L^2_{t,x}}$ とする．このとき，時間局所解の存在について次の命題を得る．

命題 1.7 (時間局所解の存在) $3/2 < s \leq 2$ とする．任意の u_0, $v_0 \in H^s(\mathbb{R})$, u_1, $v_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R})$ に対してある正定数 T があって，$(u,v) \in \{X^s \cap L^\infty([-T,T]; H_x^s)\} \times \{X^s \cap L^\infty([-T,T]; H_x^s)\}$ を満たす初期値問題 (1.1) の時間局所解が一意に存在する．

上記命題で構成された解について，次の特異性伝播に関する定理が成立する．

定理 1.8 (特異性の伝播) $(u,v) \in \{X^s \cap L^\infty([-T,T]; H_x^s)\} \times \{X^s \cap L^\infty([-T,T]; H_x^s)\}$ (ただし，$3/2 < s \leqq 2$) は命題 *1.7* で構成された時間局所解とし，□の零陪特性曲線 Γ 上の点 $(0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ で $(u,v) \in H_{ml}^r(0, x_0, \tau_0, \xi_0) \times H_{ml}^r(0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ とする．このとき，$r < 2s - 1$ であるならば，$|t| < T$ なる t に対して $(u,v) \in H_{ml}^r(\Gamma) \times H_{ml}^r(\Gamma)$ が成立する．
(注意) $s > 2$ の場合は既存の結果に含まれる．

2 零形式の評価

本セクションでは，零形式の X_1^{s-1} ノルムに関する評価を与える．零形式の定義から，$Q_0(u,v)$, $Q_1(u,v)$ は

$$Q_0(u,v) = \frac{1}{2}\{(\partial_t + \partial_x)u \cdot (\partial_t - \partial_x)v + (\partial_t - \partial_x)u \cdot (\partial_t + \partial_x)v\}, \tag{2.1}$$

$$Q_1(u,v) = \frac{1}{2}\{(\partial_t - \partial_x)u \cdot (\partial_t + \partial_x)v - (\partial_t + \partial_x)u \cdot (\partial_t - \partial_x)v\} \tag{2.2}$$

と書き換えられることに注意しておこう．以下本稿において，$Q(u,v)$ は $Q_0(u,v)$, $Q_1(u,v)$ のどちらも表すものとする。また，$a(t)$ を $C_0^\infty(\mathbb{R})$ の元で，$|t| \leq 1/2$ のとき $a(t) = 1$, $|t| \geq 1$ のとき $a(t) = 0$ を満たす関数，$T > 0$ に対して $a_T(t) = a(t/T)$ とする．まず次の補題を準備する．

補題 2.1 $3/2 < s \leq 2$ に対し，$f, g \in H^{s-1}(\mathbb{R})$ とすると，

$$\|a_T(t)f(x+t)g(x-t)\|_{X_1^{s-1}} \leq C\sqrt{T}\, \|f\|_{H^{s-1}} \|g\|_{H^{s-1}}, \tag{2.3}$$

が成立する．ここで，C は s と $a(t)$ のみに依存する定数である．

証明. $s - 1 > 1/2$ なので，$fg \in H^{s-1}(\mathbb{R})$ が成立する．これを用いて，

$$\begin{aligned}\|a_T(t)f(x+t)g(x-t)\|_{X_1^{s-1}} &\leq \left\| a_T(t) \left\| \langle D_x \rangle^{s-1}(f(x+t)g(x-t)) \right\|_{L_x^2} \right\|_{L_t^2} \\ &\leq C_s \|a_T(t)\|_{L_t^2} \|f\|_{H^{s-1}} \|g\|_{H^{s-1}} \\ &\leq C_s \sqrt{T} \|a\|_{L^2} \|f\|_{H^{s-1}} \|g\|_{H^{s-1}}.\end{aligned}$$

ただし，C_s は s のみに依存する定数である．ここで，$C = C_s\|a\|_{L^2}$ とすれば結論を得る． ∎

命題 2.2 $3/2 < s \leq 2$ に対して，$(u,v) \in X^s \times X^s$ とする．このとき，

$$\|a_T(t)Q(u,v)\|_{X_1^{s-1}} \leq CT'\|u\|_{X^s}\|v\|_{X^s} \tag{2.4}$$

が成立する．ただし，$T' = max\{T^{3/2}, T, T^{1/2}\}$，$C$ は s と $a(t)$ のみに依存する定数である．

証明. $Q_0(u,u)$ の場合のみ示す (他の場合も同様の手法で得ることができる)．
$u(0,x) = u_0(x)$, $\partial_t u(0,x) = u_1(x)$, $f_0(t,x) = \frac{1}{2}\{u_0(x+t)+u_0(x-t)\}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy$ とおく．稠密性の議論から，

$$a_T(t)(\partial_t \pm \partial_x)u = a_T(t)(\partial_t \pm \partial_x)f_0 + 2a_T(t)\int_0^t \Box u(\alpha, x \pm t \mp \alpha)d\alpha$$

が，$L^2_{loc}(\mathbb{R}, H_x^{s-1}(\mathbb{R}))$ の意味で成立する．ここで，$f_{0,\pm} = (\partial_t \pm \partial_x)f_0$, $u_\pm = (\partial_t \pm \partial_x)u$, $\widetilde{u}_\pm = 2\int_0^t \Box u(\alpha, x \pm t \mp \alpha)d\alpha$ とおくと，

$$\begin{aligned}
&\|a_T Q_0(u,u)\|_{X_1^{s-1}} \\
&\quad \leq \|a_T\widetilde{u}_+\widetilde{u}_-\|_{X_1^{s-1}} + \|a_T\widetilde{u}_+ f_{0,-}\|_{X_1^{s-1}} + \|a_T\widetilde{u}_- f_{0,+}\|_{X_1^{s-1}} + \|a_T f_{0,+} f_{0,-}\|_{X_1^{s-1}}
\end{aligned}$$

を得る．右辺第 1 項に補題 2.1 とシュワルツの不等式を用いると，

$$\begin{aligned}
&\|a_T(t)\widetilde{u}_+\widetilde{u}_-\|_{X_1^{s-1}} \\
&\leq C_s\int_0^T\int_0^T \left\|a_T(t)\langle D_x\rangle^{s-1}\{\Box u(\alpha, x+t-\alpha)\Box u(\beta, x-t+\beta)\}\right\|_{L^2_{t,x}} d\alpha d\beta \\
&\leq C_s\int_0^T\int_0^T \sqrt{T}\|a\|_{L^2}\,\|\Box u(\alpha,\cdot)\|_{H^{s-1}}\|\Box u(\beta,\cdot)\|_{H^{s-1}} d\alpha d\beta \qquad (2.5)\\
&\leq C_s T^{3/2}\|a\|_{L^2}\|\Box u\|^2_{X_1^{s-1}}.
\end{aligned}$$

同様にして，

$$\|a_T(t)f_{0,+}f_{0,-}\|_{X_1^{s-1}} \leq C_s T^{1/2}\|a\|_{L^2}(\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}})^2, \tag{2.6}$$

$$\|a_T(t)\widetilde{u}_+ f_{0,-}\|_{X_1^{s-1}} \leq C_s T\|a\|_{L^2}(\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}})\|\Box u\|_{X_1^{s-1}} \tag{2.7}$$

$$\|a_T(t)\widetilde{u}_- f_{0,+}\|_{X_1^{s-1}} \leq C_s T\|a\|_{L^2}(\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}})\|\Box u\|_{X_1^{s-1}} \tag{2.8}$$

を得る．従って，(2.5), (2.6), (2.7), (2.8) より，結論を得る． ∎

3 解の構成

本セクションでは，(1.1) の解の存在についての証明の概略を与える．詳しい証明は [9] を参照のこと．まず，次の 2 つの関数空間を定義する．

$$X^s_\rho = \{f \in X^s \mid \|f|_{t=0}\|_{H^s} + \|\partial_t f|_{t=0}\|_{H^{s-1}} \le \rho/8,\ \|\Box f\|_{X_1^{s-1}} \le \rho\}, \tag{3.1}$$

$$Y^s_{\rho,T} = \{f \in L^\infty([-T,T]; H^s_x) \mid \|f\|_{Y^s_T} \le \rho\}. \tag{3.2}$$

ただし，$\|f\|_{Y^s_T} = \|f\|_{L^\infty([-T,T];H^s_x)}$ とする．また，非線形写像 M を次のように定める．

$$M(u,v) = {}^t\begin{pmatrix} M_1(u,v) \\ M_2(u,v) \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} f_0 + \int_0^t U(t-\alpha)a_T(\alpha)A(u,v;\alpha,x)d\alpha \\ g_0 + \int_0^t U(t-\alpha)a_T(\alpha)B(u,v;\alpha,x)d\alpha \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

ここで，$U(t)\psi(x) = \int_{x-t}^{x+t}\psi(y)dy$, $f_0(t,x) = \frac{1}{2}\{u_0(x+t)+u_0(x-t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy$, $g_0(t,x) = \frac{1}{2}\{v_0(x+t)+v_0(x-t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_1(y)dy$ とする．また，A, B は

$$A(u,v;t,x) = h_1(u,v)Q_0(u,u) + h_2(u,v)Q_0(u,v) + h_3(u,v)Q_0(v,v) + h_4(u,v)Q_1(u,v)$$

$$B(u,v;t,x) = h_5(u,v)Q_0(u,u) + h_6(u,v)Q_0(u,v) + h_7(u,v)Q_0(v,v) + h_8(u,v)Q_1(u,v)$$

を表すものとする．解の存在を示すには，十分小さな T に対して，非線形写像 M が $(X^s_\rho \cap Y^s_{\rho,T}) \times (X^s_\rho \cap Y^s_{\rho,T})$ 上の縮小写像になっていることを示せばよい．つまり，任意の $(u,v), (\tilde{u},\tilde{v}) \in (X^s_\rho \cap Y^s_{\rho,T}) \times (X^s_\rho \cap Y^s_{\rho,T})$ に対して，

$$(M_1(u,v), M_2(u,v)) \in (X^s_\rho \cap Y^s_{\rho,T}) \times (X^s_\rho \cap Y^s_{\rho,T}), \tag{3.4}$$

かつ

$$\begin{aligned} &\|M(u,v) - M(\tilde{u},\tilde{v})\|_{X^s} + \|M(u,v) - M(\tilde{u},\tilde{v})\|_{Y^s_T} \\ &\qquad \le \frac{1}{2}\|(u,v) - (\tilde{u},\tilde{v})\|_{X^s} + \frac{1}{2}\|(u,v) - (\tilde{u},\tilde{v})\|_{Y^s_T}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

を示せば，縮小写像の原理より，$(X^s_\rho \cap Y^s_{\rho,T}) \times (X^s_\rho \cap Y^s_{\rho,T})$ の中に M のただ 1 つの不動点 (u,v) が存在し，この (u,v) が初期値問題 (1.1) の解となる．そのために，以下の補題を準備する．

補題 3.1 $3/2 < s \le 2$ に対し，$(u,v) \in (X^s_\rho \cap Y^s_{\rho,T}) \times (X^s_\rho \cap Y^s_{\rho,T})$ とする．このとき，

$$\|\Box M_\ell(u,v)\|_{X_1^{s-1}} \le CT' \sum_{0\le j+k\le n} \|u\|^j_{Y^s_T}\|v\|^k_{Y^s_T}(\|u\|_{X^s} + \|v\|_{X^s})^2 \quad (\ell = 1,2) \tag{3.6}$$

が成立する．ここで，$T' = max\{T^{3/2}, T, T^{1/2}\}$, C は s, $a(t)$, $h_i (i = 1,2,\ldots,8)$ に依存する定数，n は h_i の次数の最大値とする．

証明. $\ell=1$ の場合のみ示す．M_1 の定義と三角不等式より，

$$
\begin{aligned}
\|\Box M_1(u,v)\|_{X_1^{s-1}} &= \|a_T(t)A(u,v;t,x)\|_{X_1^{s-1}}\\
&\le \|a_T(t)h_1(u,v)Q_0(u,u)\|_{X_1^{s-1}}+\|a_T(t)h_2(u,v)Q_0(u,v)\|_{X_1^{s-1}}\\
&\quad+\|a_T(t)h_3(u,v)Q_0(v,v)\|_{X_1^{s-1}}+\|a_T(t)h_4(u,v)Q_1(u,v)\|_{X_1^{s-1}}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

が成立．$h_i(u,v)=\sum_{0\le j+k\le n_i} c_{j,k}^{(i)}u^jv^k$ とおくと，命題2.2より，

$$
\begin{aligned}
\|a_T(t)h_1(u,v)Q_0(u,u)\|_{X_1^{s-1}} &\le C_s\left\|\|h_1(u,v)\|_{H_x^{s-1}}\|a_T(t)Q_0(u,u)\|_{H_x^{s-1}}\right\|_{L^2_{[-T,T]}}\\
&\le C_s\left\|\|h_1(u,v)\|_{H_x^{s-1}}\right\|_{L^\infty_{[-T,T]}}\|a_T(t)Q_0(u,u)\|_{X_1^{s-1}}\\
&\le C_1T'\sum_{0\le j+k\le n_1}\|u\|_{Y_T^s}^j\|v\|_{Y_T^s}^k\|u\|_{X^s}^2.
\end{aligned}
$$

C_1 は s, $a(t)$, h_1 に依る定数である．同様に C_i $(i=2,3,4)$ を s, $a(t)$, h_i に依る定数とすれば，

$$
\begin{aligned}
\|a_T(t)h_2(u,v)Q_0(u,v)\|_{X_1^{s-1}} &\le C_2T'\sum_{0\le j+k\le n_2}\|u\|_{Y_T^s}^j\|v\|_{Y_T^s}^k\|u\|_{X^s}\|v\|_{X^s},\\
\|a_T(t)h_3(u,v)Q_0(v,v)\|_{X_1^{s-1}} &\le C_3T'\sum_{0\le j+k\le n_3}\|u\|_{Y_T^s}^j\|v\|_{Y_T^s}^k\|v\|_{X^s}^2,\\
\|a_T(t)h_4(u,v)Q_1(u,v)\|_{X_1^{s-1}} &\le C_4T'\sum_{0\le j+k\le n_4}\|u\|_{Y_T^s}^j\|v\|_{Y_T^s}^k\|u\|_{X^s}\|v\|_{X^s}.
\end{aligned}
$$

ここで，$n=\max\limits_{1\le i\le 4}n_i$ かつ $C=\max\limits_{1\le i\le 4}C_i$ とすれば，

$$
\|\Box M_1(u,v)\|_{X_1^{s-1}}\le CT'\sum_{0\le j+k\le n}\|u\|_{Y_T^s}^j\|v\|_{Y_T^s}^k(\|u\|_{X^s}+\|v\|_{X^s})^2.
$$

を得る． ∎

補題 3.2 補題 *3.1* と同じ条件の下で，

$$
\|M_1(u,v)\|_{Y_T^s}\le CT'\sum_{0\le j+k\le n}\|u\|_{Y_T^s}^j\|v\|_{Y_T^s}^k(\|u\|_{X^s}+\|v\|_{X^s})^2+\|u_0\|_{H^s}+2\|u_1\|_{H^{s-1}},
\tag{3.8}
$$

$$
\|M_2(u,v)\|_{Y_T^s}\le CT'\sum_{0\le j+k\le n}\|u\|_{Y_T^s}^j\|v\|_{Y_T^s}^k(\|u\|_{X^s}+\|v\|_{X^s})^2+\|v_0\|_{H^s}+2\|v_1\|_{H^{s-1}}
\tag{3.9}
$$

が成立する．ただし，C は s, $a(t)$, $h_i\,(i=1,2,\dots,8)$ に依存する正定数である．

証明. (3.8) のみ示す．M の定義と，三角不等式から，

$$\begin{aligned}\|M_1(u,v)\|_{Y_T^s} &= \left\| f_0 + \int_0^t U(t-\alpha)a_T(\alpha)A(u,v;\alpha,x)d\alpha \right\|_{L^\infty([-T,T];H_x^s)} \\ &\le \|f_0\|_{L^\infty([-T,T];H_x^s)} + C_s\Bigg(\left\| \int_0^t U(t-\alpha)a_T(\alpha)A(u,v;\alpha,x)d\alpha \right\|_{L^\infty([-T,T];L_x^2)} \\ &\qquad + \left\| |D_x|^s \int_0^t U(t-\alpha)a_T(\alpha)A(u,v;\alpha,x)d\alpha \right\|_{L^\infty([-T,T];L_x^2)} \Bigg)\end{aligned}$$

を得る．微分を実行することにより右辺第 3 項は

$$\begin{aligned}&\left\| |D_x|^s \int_0^t U(t-\alpha)a_T(\alpha)A(u,v;\alpha,x)d\alpha \right\|_{L^\infty([-T,T];L_x^2)} \\ &\le \left\| \left\| \int_0^t |D_x|^{s-1}a_T(\alpha)(A(u,v;\alpha,x+t-\alpha)-A(u,v;\alpha,x-t+\alpha))d\alpha \right\|_{L_x^2} \right\|_{L^\infty[-T,T]} \\ &\le \left\| 2\int_0^T \||D_x|^{s-1}a_T(\alpha)A(u,v;\alpha,x)\|_{L_x^2} d\alpha \right\|_{L^\infty[-T,T]} \\ &\le 2\sqrt{T}\|a_T(t)A(u,v;t,x)\|_{X_1^{s-1}}\end{aligned}$$

と評価できる．また，変数変換してからシュワルツの不等式を用いると，右辺第 2 項は

$$\begin{aligned}&\left\| \int_0^t U(t-\alpha)a_T(\alpha)A(u,v;\alpha,x)d\alpha \right\|_{L^\infty([-T,T];L_x^2)} \\ &\le \left\| \int_0^T \left\| \int_{x-(t-\alpha)}^{x+t-\alpha} a_T(\alpha)A(u,v;\alpha,y)dy \right\|_{L_x^2} d\alpha \right\|_{L^\infty[-T,T]} \\ &\le \left\| \int_0^T \int_{-(t-\alpha)}^{t-\alpha} \|a_T(\alpha)A(u,v;\alpha,x+y)\|_{L_x^2} dyd\alpha \right\|_{L^\infty[-T,T]} \\ &\le \left\| 2\sup_{\alpha\in[0,T]}|t-\alpha| \int_0^T \|a_T(\alpha)A(u,v;\alpha,x)\|_{L_x^2} d\alpha \right\|_{L^\infty[-T,T]} \\ &\le 2\left\| \sup_{\alpha\in[0,T]}|t-\alpha|\sqrt{T}\|a_T(t)A(u,v;t,x)\|_{X_1^{s-1}} \right\|_{L^\infty[-T,T]} \\ &\le 4T^{3/2}\|a_T(t)A(u,v;t,x)\|_{X_1^{s-1}}\end{aligned}$$

と評価できる．右辺第 1 項に関しても同様の計算によって，

$$\|f_0\|_{L^\infty([-T,T];H_x^s)} \le \|u_0\|_{H^s} + 2\|u_1\|_{H^{s-1}} + 2T\|u_1\|_{H^{s-1}}.$$

が成立．よって，補題 3.1 より，結論を得る． ∎

補題 3.3 $3/2 < s \le 2$ に対して，$(u,v),(\tilde{u},\tilde{v}) \in (X^s_\rho \cap Y^s_{\rho,T}) \times (X^s_\rho \cap Y^s_{\rho,T})$ とする．また，$h(u,v)$ は u，v に関する n 次の多項式とする．このとき，

$$\begin{aligned}
&\|a_T(t)\{h(u,v)Q(u,v) - h(\tilde{u},\tilde{v})Q(\tilde{u},\tilde{v})\}\|_{X_1^{s-1}} \\
&\quad \le CT'\Big\{\Big(K(u,\tilde{u},v)\,\|u-\tilde{u}\|_{Y^s_T} + K(v,\tilde{v},\tilde{u})\,\|v-\tilde{v}\|_{Y^s_T}\Big)\|u\|_{X^s}\|v\|_{X^s} \\
&\qquad + h(\|\tilde{u}\|_{Y^s_T}, \|\tilde{v}\|_{Y^s_T})\,(\|u-\tilde{u}\|_{X^s}\|v\|_{X^s} + \|\tilde{u}\|_{X^s}\|v-\tilde{v}\|_{X^s})\Big\} \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t U(t-\alpha)a_T(\alpha)\{h(u,v)Q(u,v) - h(\tilde{u},\tilde{v})Q(\tilde{u},\tilde{v})\}d\alpha\right\|_{Y^s_T} \\
&\quad \le CT'\Big\{\Big(K(u,\tilde{u},v)\,\|u-\tilde{u}\|_{Y^s_T} + K(v,\tilde{v},\tilde{u})\,\|v-\tilde{v}\|_{Y^s_T}\Big)\|u\|_{X^s}\|v\|_{X^s} \\
&\qquad + h(\|\tilde{u}\|_{Y^s_T}, \|\tilde{v}\|_{Y^s_T})\,(\|u-\tilde{u}\|_{X^s}\|v\|_{X^s} + \|\tilde{u}\|_{X^s}\|v-\tilde{v}\|_{X^s})\Big\} \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

か成立する．ただし，

$$K(p,q,r) = \sum_{1\le i+j\le n} \|r\|^i_{Y^s_T}(\|p\|^{j-1}_{Y^s_T} + \|p\|^{j-2}_{Y^s_T}\|q\|_{Y^s_T} + \|p\|^{j-3}_{Y^s_T}\|q\|^2_{Y^s_T} + \cdots + \|q\|^{j-1}_{Y^s_T}),$$

$T' = max\{T^{3/2}, T, T^{1/2}\}$，$C$ は s と h による定数である．

証明． 三角不等式を用いて，

$$\begin{aligned}
&\|a_T(t)\{h(u,v)Q(u,v) - h(\tilde{u},\tilde{v})Q(\tilde{u},\tilde{v})\}\|_{X_1^{s-1}} \\
&\quad \le C(\|h(u,v) - h(\tilde{u},\tilde{v})\|_{Y^s_T}\,\|a_T(t)Q(u,v)\|_{X_1^{s-1}} \\
&\qquad + \|h(\tilde{u},\tilde{v})\|_{Y^s_T}\,\|a_T(t)\{Q(u,v) - Q(\tilde{u},\tilde{v})\}\|_{X_1^{s-1}}). \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

$h(u,v) = \sum_{0\le i+j\le n} c_{i,j}u^iv^j$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\|h(u,v) - h(\tilde{u},\tilde{v})\|_{Y^s_T} &\le \|h(u,v) - h(\tilde{u},v)\|_{Y^s_T} + \|h(\tilde{u},v) - h(\tilde{u},\tilde{v})\|_{Y^s_T} \qquad (3.13)\\
&\le \left\|(u-\tilde{u})\sum_{1\le i+j\le n} c_{i,j}v^j(u^{i-1} + \cdots + \tilde{u}^{i-1})\right\|_{Y^s_T} \\
&\quad + \left\|(v-\tilde{v})\sum_{1\le i+j\le n} c_{i,j}\tilde{u}^i(v^{j-1} + \cdots + \tilde{v}^{j-1})\right\|_{Y^s_T} \\
&\le C\max_{1\le i+j\le n}|c_{i,j}|\,\Big(K(u,\tilde{u},v)\,\|u-\tilde{u}\|_{Y^s_T} + K(v,\tilde{v},\tilde{u})\,\|v-\tilde{v}\|_{Y^s_T}\Big).
\end{aligned}$$

が成り立つ．また，命題 2.2 より，

$$\begin{aligned}&\|a_T(t)\{Q(u,v)-Q(\tilde{u},\tilde{v})\}\|_{X_1^{s-1}} \\ &\le \|a_T(t)Q(u-\tilde{u},v)\|_{X_1^{s-1}}+\|a_T(t)Q(\tilde{u},v-\tilde{v})\|_{X_1^{s-1}} \\ &\le CT'\left(\|u-\tilde{u}\|_{X^s}\|v\|_{X^s}+\|\tilde{u}\|_{X^s}\|v-\tilde{v}\|_{X^s}\right).\end{aligned} \tag{3.14}$$

よって，(3.12)，(3.13)，(3.14) から結論を得る．同様にして，(3.11) も示すことができる． ∎

命題 1.7. の証明． $u,v\in X_\rho^s\cap Y_{\rho,T}^s$ に対して，$M_1(u,v)|_{t=0}=u_0(x)$，$\partial_t M_1(u,v)|_{t=0}=u_1(x)$ は明らか．したがって，$\|M_1(u,v)|_{t=0}\|_{H^s}+\|\partial_t M_1(u,v)|_{t=0}\|_{H^{s-1}}\le \rho/8$ が成立．また，補題 3.1，補題 3.2 より，

$$\|\Box M_1(u,v)\|_{X_1^{s-1}}\le CT'\sum_{0\le j+k\le n}\rho^{j+k+2},\qquad \|M_1(u,v)\|_{Y_T^s}\le CT'\sum_{0\le j+k\le n}\rho^{j+k+2}+\frac{3\rho}{8}$$

が成立．したがって，十分小さな $T>0$ をとれば，$M_1(u,v)\in X_\rho^s\cap Y_{\rho,T}^s$ を得る．同様にして，$M_2(u,v)\in X_\rho^s\cap Y_{\rho,T}^s$ が得られるので，(3.4) が成り立つ．また，補題 3.1，補題 3.2，補題 3.3 を用いれば，上の計算と同様にして (3.5) を得る． ∎

4 特異性の伝播

解の特異性を測るために，次のような準備をする．まず，$\varphi(t,x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ は (t_0,x_0) の近傍で $\varphi\equiv 1$ とする．また，$\chi(\tau,\xi)$ は滑らかで，原点の近傍では 0，ある $\varepsilon>0$ に対して $|(\tau,\xi)|>\varepsilon$ で 0 次斉次，錐集合状の台を持ち，(τ_0,ξ_0) の錐近傍では $\chi\equiv 1$ とする．このとき，シンボルが $p(t,x,\tau,\xi)=\varphi(x+(\xi/\tau)t)\chi(\tau,\xi)$ である次のような作用素

$$Pf(t,x)=\int_{\mathbb{R}^2}p(t,x,\tau,\xi)\hat{f}(\tau,\xi)e^{i(t\tau+x\xi)}d\tau d\xi \tag{4.1}$$

を考える．簡単な計算により，$\Box$ と P の交換子 $[\Box,P]=\Box P-P\Box$ のシンボルは $(\xi^2/\tau^2-1)\varphi''(x+(\xi/\tau)t)\chi$ であり，これは 0 階の擬微分作用素のシンボルである．主定理を証明するために以下の補題を述べる (詳しい証明は [9] を参照)．

補題 4.1 $3/2<s\le 2$，P は (4.1) で定義された作用素，(u,v) はある $T>0$ に対して，$(X_\rho^s\cap Y_{\rho,T}^s)\times(X_\rho^s\cap Y_{\rho,T}^s)$ に属する初期値問題 (1.1) の解とする．$0<\delta<T$ か

つ $0 \leq \epsilon < s-1$ とすると，$|t| < T-\delta$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\left\| a_\delta(\tilde{t}) \Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon} \left(P(\partial_t \pm \partial_x) h(u,v) Q(u,v) \right) (t-\tilde{t}) \right\|_{L^2_{\tilde{t},x}} \\
&\quad \leq C_1(\|u\|_{X^s}, \|v\|_{X^s}, \|u\|_{Y_T^s}, \|v\|_{Y_T^s}) \left\| a_\delta(\tilde{t}) \Lambda_{\tilde{t},x}^{s-1+\epsilon} Pu_\pm(t-\tilde{t},x) \right\|_{L^2_{\tilde{t},x}} \\
&\quad + C_2(\|u\|_{X^s}, \|v\|_{X^s}, \|u\|_{Y_T^s}, \|v\|_{Y_T^s}) \left\| a_\delta(\tilde{t}) \Lambda_{\tilde{t},x}^{s-1+\epsilon} Pv_\pm(t-\tilde{t},x) \right\|_{L^2_{\tilde{t},x}} \\
&\quad + C_3(\|u\|_{X^s}, \|v\|_{X^s}, \|u\|_{Y_T^s}, \|v\|_{Y_T^s}), \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

が成立する．ただし，$u_\pm = (\partial_t \pm \partial_x)u$, $v_\pm = (\partial_t \pm \partial_x)v$, $C_i(\|u\|_{X^s}, \|v\|_{X^s}, \|u\|_{Y_T^s}, \|v\|_{Y_T^s})$ $(i=1,2,3)$ は $\|u\|_{X^s}$, $\|v\|_{X^s}$, $\|u\|_{Y_T^s}$, $\|v\|_{Y_T^s}$ に依存する定数とする．

証明． $Q(u,v) = Q_0(u,v)$ の場合のみ示す．$b(\tilde{t}) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を $\operatorname{supp} b \subset \{|\tilde{t}| < T\}$ かつ $|\tilde{t}| \leq \delta + \delta'$ に対して，$b \equiv 1$ を満たすようにとる．ただし，δ' は $|t| < \delta' < T - \delta$ を満たす正定数とする．このとき，$|t| < \delta'$ であれば

$$\begin{aligned}
&\left\| a_\delta(\tilde{t}) \Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon} \left(P(\partial_t \pm \partial_x) h(u,v) Q_0(u,v) \right) (t-\tilde{t}) \right\|_{L^2_{\tilde{t},x}} \qquad (4.3) \\
&= \left\| b(t-\tilde{t}) a_\delta(\tilde{t}) \Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon} \left(P(\partial_t \pm \partial_x) h(u,v) Q_0(u,v) \right) (t-\tilde{t}) \right\|_{L^2_{\tilde{t},x}} \\
&\leq \left\| b(t-\tilde{t}) a_\delta(\tilde{t}) \Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon} \left(Ph_1 u_\pm Q_0(u,v) \right) (t-\tilde{t}) \right\|_{L^2_{\tilde{t},x}} \\
&\quad + \left\| b(t-\tilde{t}) a_\delta(\tilde{t}) \Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon} (Ph_2 v_\pm Q_0(u,v))(t-\tilde{t}) \right\|_{L^2_{\tilde{t},x}} \\
&\quad + \left\| b(t-\tilde{t}) a_\delta(\tilde{t}) \Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon} (PhQ(u,v_\pm))(t-\tilde{t}) \right\|_{L^2_{\tilde{t},x}} \\
&\quad + \left\| b(t-\tilde{t}) a_\delta(\tilde{t}) \Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon} (PhQ(u_\pm,v))(t-\tilde{t}) \right\|_{L^2_{\tilde{t},x}}
\end{aligned}$$

が成立．ここで，h_j $(j=1,2)$ は h の偏微分を表す．まず，(4.3) の第 1 項と第 2 項を考えよう．交換子 $[A,B] = AB - BA$ を用いると，

$$\begin{aligned}
&b(t-\tilde{t}) a_\delta(\tilde{t}) \Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon} (Ph_1 u_\pm Q_0(u,v))(t-\tilde{t}) \qquad (4.4) \\
&\quad = [b(t-\tilde{t}) a_\delta(\tilde{t}), \Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon}] (Ph_1 u_\pm Q_0(u,v))(t-\tilde{t}) \\
&\qquad + \Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon} a_\delta(\tilde{t}) [b(t-\tilde{t}), P] (h_1 Q_0(u,v) u_\pm)(t-\tilde{t}) \\
&\qquad + \Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon} a_\delta(\tilde{t}) [P, (bh_1 Q_0(u,v))(t-\tilde{t})] u_\pm(t-\tilde{t}) \\
&\qquad + \Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon} a_\delta(\tilde{t}) (h_1 b Q_0(u,v))(t-\tilde{t}) (Pu_\pm)(t-\tilde{t}).
\end{aligned}$$

ここで，右辺第4項の評価が一番の問題となる．簡単のため，$\eta=(\tilde{\tau},\xi)$，$\eta'=(\tilde{\tau}',\xi')$ とおく．このとき，

$$\theta_t^{(1)}(\eta)=\langle\eta\rangle^{s-1}\mathcal{F}_{\tilde{t},x}[h_1bQ_0(u,v)(t-\tilde{t})],\quad \theta_t^{(2)}(\eta)=\langle\eta\rangle^{s-1+\epsilon}\mathcal{F}_{\tilde{t},x}[a_\delta(\tilde{t})Pu_\pm(t-\tilde{t})],$$

かつ

$$K_1(\eta,\eta')=\frac{\langle\eta\rangle^{s-2+\epsilon}}{\langle\eta'\rangle^{s-1}\langle\eta-\eta'\rangle^{s-1+\epsilon}}$$

とすると，

$$\begin{aligned}\langle\eta\rangle^{s-2+\epsilon}\mathcal{F}_{\tilde{t},x}&\left[(h_1bQ_0(u,v))(t-\tilde{t})a_\delta(\tilde{t})Pu_\pm(t-\tilde{t})\right](\eta)\\ &=\int K_1(\eta,\eta')\theta_t^{(1)}(\eta')\theta_t^{(2)}(\eta-\eta')d\eta'\end{aligned}$$

と表せる．従って，$0\le\epsilon<s-1$ であれば，

$$\begin{aligned}&\left\|\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon}(h_1bQ_0(u,v))(t-\tilde{t})a_\delta(\tilde{t})(Pu_\pm)(t-\tilde{t})\right\|_{L^2_{\tilde{t},x}}\\ &\le C\|\theta_t^{(1)}\|_{L^2_{\tilde{t},x}}\|\theta_t^{(2)}\|_{L^2_{\tilde{t},x}}\\ &\le C'\left\|h_1bQ_0(u,v)\right\|_{H^{s-1}}\\ &\qquad\times\left(\left\|a_\delta(\tilde{t})\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-1+\epsilon}Pu_\pm(t-\tilde{t})\right\|_{L^2_{\tilde{t},x}}+\left\|[\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-1+\epsilon},a_\delta(\tilde{t})]Pu_\pm(t-\tilde{t})\right\|_{L^2_{\tilde{t},x}}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，このことと (4.4) の第1項から第3項までの評価を合わせて，

$$\begin{aligned}&\left\|b(t-\tilde{t})a_\delta(\tilde{t})\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon}(Ph_1u_\pm Q_0(u,v))(t-\tilde{t})\right\|_{L^2_{\tilde{t},x}}\\ &\qquad\le C_1'(\|u\|_{X^s},\|v\|_{X^s},\|u\|_{Y_T^s},\|v\|_{Y_T^s})\left\|a_\delta(\tilde{t})\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-1+\epsilon}Pu_\pm(t-\tilde{t})\right\|_{L^2_{\tilde{t},x}}\\ &\qquad\qquad+C_2'(\|u\|_{X^s},\|v\|_{X^s},\|u\|_{Y_T^s},\|v\|_{Y_T^s}).\end{aligned}\tag{4.5}$$

を得る．次に (4.3) の第3項，第4項の評価を与える．いま，$Q_0(u,v_\pm)=1/2\{u_+(\partial_t-\partial_x)v_\pm+u_-(\partial_t+\partial_x)v_\pm\}$ と書けるので，

$$\begin{aligned}2&\left\|b(t-\tilde{t})a_\delta(\tilde{t})\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon}\big(PhQ_0(u,v_\pm)\big)(t-\tilde{t})\right\|_{L^2_{\tilde{t},x}}\\ &\le\left\|b(t-\tilde{t})a_\delta(\tilde{t})\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon}\big(Phu_+(\partial_t-\partial_x)v_\pm\big)(t-\tilde{t})\right\|_{L^2_{\tilde{t},x}}\\ &\quad+\left\|b(t-\tilde{t})a_\delta(\tilde{t})\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon}\big(Phu_-(\partial_t+\partial_x)v_\pm\big)(t-\tilde{t})\right\|_{L^2_{\tilde{t},x}}\end{aligned}\tag{4.6}$$

が成り立つ．(4.4) の評価と同様にして，

$$
\begin{aligned}
&b(t-\tilde{t})a_\delta(\tilde{t})\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon}\big(Phu_+(\partial_t-\partial_x)v_\pm\big)(t-\tilde{t}) \\
&\quad=[b(t-\tilde{t})a_\delta(\tilde{t}),\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon}]\big(Phu_+(\partial_t-\partial_x)v_\pm\big)(t-\tilde{t}) \\
&\qquad+\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon}a_\delta(\tilde{t})([b(t-\tilde{t}),P]hu_+(\partial_t-\partial_x)v_\pm)(t-\tilde{t}) \\
&\qquad+\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon}a_\delta(\tilde{t})[P,b(t-\tilde{t})hu_+(\partial_t-\partial_x)]v_\pm \\
&\qquad-\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon}(bhu_+)(t-\tilde{t})[a_\delta(\tilde{t}),\partial_{\tilde{t}}+\partial_x](Pv_\pm)(t-\tilde{t}) \\
&\qquad-\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon}(bu_+h)(t-\tilde{t})(\partial_{\tilde{t}}+\partial_x)a_\delta(\tilde{t})(Pv_\pm)(t-\tilde{t})
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

が成立．(4.7) の右辺について，第 1 項，第 2 項，第 3 項，第 4 項が $L^2_{\tilde{t},x}$ であることは比較的簡単に得られる．問題となるのは第 5 項である．

$$
\theta_t^{(3)}(\eta)=\langle\eta\rangle^{s-1}(1+|\tilde{\tau}-\xi|)\mathcal{F}_{\tilde{t},x}[(bhu_+)(t-\tilde{t})]
$$

$$
\theta_t^{(4)}(\eta)=\langle\eta\rangle^{s-1+\epsilon}\mathcal{F}_{\tilde{t},x}[a_\delta(\tilde{t})Pv_\pm(t-\tilde{t})]
$$

$$
|K_2(\eta,\eta')|=\frac{\langle\eta\rangle^{s-2+\epsilon}|\tilde{\tau}'+\xi'|}{\langle\eta'\rangle^{s-1}\langle\eta-\eta'\rangle^{s-1+\epsilon}(1+|(\tilde{\tau}-\tilde{\tau}')-(\xi-\xi')|)}
$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
&\langle\eta\rangle^{s-2+\epsilon}\mathcal{F}_{\tilde{t},x}\left[(bu_+h)(t-\tilde{t})(\partial_{\tilde{t}}+\partial_x)a_\delta(\tilde{t})(Pv_\pm)(t-\tilde{t})\right](\eta) \\
&\qquad\qquad=\int K_2(\eta,\eta')\theta_t^{(3)}(\eta')\theta_t^{(4)}(\eta-\eta')d\eta'.
\end{aligned}
$$

を得る．従って，

$$
\begin{aligned}
&\left\|\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon}(bu_+h)(t-\tilde{t})(\partial_{\tilde{t}}+\partial_x)a_\delta(\tilde{t})(Pv_\pm)(t-\tilde{t})\right\|_{L^2_{\tilde{t},x}} \\
&\le C\|\theta_t^{(3)}\|_{L^2_{\tilde{t},x}}\|\theta_t^{(4)}\|_{L^2_{\tilde{t},x}} \\
&\le C\,\|h\|_{H^s}(\|u_\pm\|_{H^{s-1}}+\|\partial_{\tilde{t}}b\,u_+\|_{H^{s-1}}+\|b(t)\Box u\|_{H^{s-1}}) \\
&\qquad\times\left(\left\|a_\delta(\tilde{t})\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon}Pv_\pm(t-\tilde{t})\right\|_{L^2_{\tilde{t},x}}+\left\|[\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon},a_\delta(\tilde{t})]Pv_\pm(t-\tilde{t})\right\|_{L^2_{\tilde{t},x}}\right)
\end{aligned}
$$

が成立．よって，

$$\left\|b(t-\tilde{t})a_\delta(\tilde{t})\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon}\big(Phu_+(\partial_t-\partial_x)v_\pm\big)(t-\tilde{t})\right\|_{L^2_{\tilde{t},x}}$$
$$\le C_3'(\|u\|_{X^s},\|v\|_{X^s},\|u\|_{Y_T^s},\|v\|_{Y_T^s})\left\|a_\delta(\tilde{t})\Lambda_{\tilde{t},x}^{s-2+\epsilon}Pv_\pm(t-\tilde{t})\right\|_{L^2_{\tilde{t},x}}$$
$$+C_4'(\|u\|_{X^s},\|v\|_{X^s},\|u\|_{Y_T^s},\|v\|_{Y_T^s}). \quad (4.8)$$

を得る．以上，(4.5) と (4.8) から結論を得る． ∎

以上の準備の下で，主定理の証明を与える．

定理 1.8. の証明 $u_\pm=(\partial_t\pm\partial_x)u$，$v_\pm=(\partial_t\pm\partial_x)v$ とおく．零陪特性曲線 Γ の近傍において，$\partial_t+\partial_x$，$\partial_t-\partial_x$ のどちらかは楕円型であるから，$|t|<T$ において $u,v\in H^r_{ml}(\Gamma)$ を示すには，$u_\pm,v_\pm\in H^{r-1}_{ml}(\Gamma)$ を示せば十分である．また，$a(t)\in C_0^\infty$ と (4.1) の P に対して，$a(t)P$ は 0 階の作用素であり，Γ の近傍で楕円型であるから，$Pu_\pm,Pv_\pm\in H^{r-1}_{loc}$ を示せば十分であることがわかる．$\partial_t\pm\partial_x$ を (1.1) の第 1 式の両辺に掛けると，

$$\Box u_\pm=(\partial_t\pm\partial_x)F(u,v,\partial u,\partial v). \quad (4.9)$$

さらに，P を (4.9) の両辺に掛けると，

$$\Box Pu_\pm=[\Box,P]u_\pm+P(\partial_t\pm\partial_x)F(u,v,\partial u,\partial v) \quad (4.10)$$

を得る．ここで，エネルギー $E(t;u,v)$ を次のように定義する．

$$E(t;u,v)\equiv\left\|a_\delta(\tilde{t})\Lambda_{\tilde{t},x}^{r-2}\partial_{\tilde{t}}Pu_\pm(t-\tilde{t})\right\|^2_{L^2_{\tilde{t},x}}+\left\|a_\delta(\tilde{t})\Lambda_{\tilde{t},x}^{r-2}\partial_xPu_\pm(t-\tilde{t})\right\|^2_{L^2_{\tilde{t},x}}$$
$$+\left\|a_\delta(\tilde{t})\Lambda_{\tilde{t},x}^{r-2}Pu_\pm(t-\tilde{t})\right\|^2_{L^2_{\tilde{t},x}}+\left\|a_\delta(\tilde{t})\Lambda_{\tilde{t},x}^{r-2}\partial_{\tilde{t}}Pv_\pm(t-\tilde{t})\right\|^2_{L^2_{\tilde{t},x}}$$
$$+\left\|a_\delta(\tilde{t})\Lambda_{\tilde{t},x}^{r-2}\partial_xPv_\pm(t-\tilde{t})\right\|^2_{L^2_{\tilde{t},x}}+\left\|a_\delta(\tilde{t})\Lambda_{\tilde{t},x}^{r-2}Pv_\pm(t-\tilde{t})\right\|^2_{L^2_{\tilde{t},x}},$$

ただし，$\Lambda=\langle D\rangle$，$r<2s-1$，$0<\delta<T$，$a_\delta(t)=a(t/\delta)$ とする．このエネルギーを用いると，主張を証明するためには，$|t|<T$ において $E(t;u,v)<\infty$ を示せば十分．$\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ は，$\int\varphi(x)dx=1$ を満たすとし，$\varphi_\omega(x)=\frac{1}{\omega}\varphi\left(\frac{x}{\omega}\right)$ に対して，$u_0^\omega=\varphi_\omega*u_0$，$u_1^\omega=\varphi_\omega*u_1$，$v_0^\omega=\varphi_\omega*v_0$，$v_1^\omega=\varphi_\omega*v_1$ とおく．$f_0^\omega(t,x)=\frac{1}{2}\{u_0^\omega(x+t)+u_0^\omega(x-t)\}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}u_1^\omega(y)dy$，$g_0^\omega(t,x)=\frac{1}{2}\{v_0^\omega(x+t)+v_0^\omega(x-t)\}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}v_1^\omega(y)dy$ に対して，(u_ω,v_ω) を

$$u_\omega=f_0^\omega(t,x)+\int_0^tU(t-\alpha)a_T(\alpha)(\varphi_\omega*A(u_\omega,v_\omega))d\alpha, \quad (4.11)$$

$$v_\omega=g_0^\omega(t,x)+\int_0^tU(t-\alpha)a_T(\alpha)(\varphi_\omega*B(u_\omega,v_\omega))d\alpha \quad (4.12)$$

の滑らかな解とする．ここで単純な計算から，$\omega\to 0$のとき

$$\|u-u_\omega\|_{X^s}\to 0,\ \|u-u_\omega\|_{Y_T^s}\to 0,\ \|v-v_\omega\|_{X^s}\to 0,\ \|v-v_\omega\|_{Y_T^s}\to 0 \tag{4.13}$$

であり，$0<{}^\forall\omega\le 1$に対して$\|u_\omega\|_{X^s}\le C\|u\|_{X^s}$，$\|u_\omega\|_{Y_T^s}\le C\|u\|_{Y_T^s}$，$\|v_\omega\|_{X^s}\le C\|v\|_{X^s}$，$\|v_\omega\|_{Y_T^s}\le C\|v\|_{Y_T^s}$が成り立つことに注意しておこう(ただし，$C$は正の定数)．今，$E(t;u_\omega,v_\omega)$を考える．$u_\omega,\,v_\omega\in C^\infty$であるから，$E(t;u_\omega,v_\omega)<\infty$が成り立つ．シュワルツの不等式と擬微分作用素の計算により，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{dE(t;u_\omega,v_\omega)}{dt}\\
&\quad=-\mathrm{Re}\langle a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}\Box Pu_{\omega,\pm}(t-\tilde t),a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}\partial_{\tilde t}(Pu_{\omega,\pm}(t-\tilde t))\rangle\\
&\qquad+\mathrm{Re}\langle a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}\partial_t(Pu_{\omega,\pm}(t-\tilde t)),a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}Pu_{\omega,\pm}(t-\tilde t)\rangle\\
&\qquad-\mathrm{Re}\langle a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}\Box Pv_{\omega,\pm}(t-\tilde t),a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}\partial_{\tilde t}(Pv_{\omega,\pm}(t-\tilde t))\rangle\\
&\qquad+\mathrm{Re}\langle a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}\partial_t(Pv_{\omega,\pm}(t-\tilde t)),a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}Pv_{\omega,\pm}(t-\tilde t)\rangle\\
&\quad\le\left\|a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}\Box Pu_{\omega,\pm}(t-\tilde t)\right\|_{L^2_{\tilde t,x}}\cdot\left\|a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}\partial_{\tilde t}(Pu_{\omega,\pm}(t-\tilde t))\right\|_{L^2_{\tilde t,x}}\\
&\qquad+\left\|a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}\partial_t(Pu_{\omega,\pm}(t-\tilde t))\right\|_{L^2_{\tilde t,x}}\cdot\left\|a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}Pu_{\omega,\pm}(t-\tilde t)\right\|_{L^2_{\tilde t,x}}\\
&\qquad+\left\|a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}\Box Pv_{\omega,\pm}(t-\tilde t)\right\|_{L^2_{\tilde t,x}}\cdot\left\|a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}\partial_{\tilde t}(Pv_{\omega,\pm}(t-\tilde t))\right\|_{L^2_{\tilde t,x}}\\
&\qquad+\left\|a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}\partial_t(Pv_{\omega,\pm}(t-\tilde t))\right\|_{L^2_{\tilde t,x}}\cdot\left\|a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}Pv_{\omega,\pm}(t-\tilde t)\right\|_{L^2_{\tilde t,x}}\\
&\quad\le\frac{1}{2}\left\|a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}\Box Pu_{\omega,\pm}(t-\tilde t)\right\|_{L^2_{\tilde t,x}}^2+\frac{1}{2}\left\|a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}\Box Pv_{\omega,\pm}(t-\tilde t)\right\|_{L^2_{\tilde t,x}}^2\\
&\qquad+3E(t;u_\omega,v_\omega),
\end{aligned}$$

を得る．ただし，$u_{\omega,\pm}=(\partial_t\pm\partial_x)u_\omega$，$v_{\omega,\pm}=(\partial_t\pm\partial_x)v_\omega$とする．(4.10)より，

$$\begin{aligned}
&\left\|a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}\Box Pu_{\omega,\pm}(t-\tilde t)\right\|_{L^2_{\tilde t,x}}^2\\
&\qquad\le\left\|a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}[\Box,P]u_{\omega,\pm}(t-\tilde t)\right\|_{L^2_{\tilde t,x}}^2\\
&\qquad\quad+\left\|a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}P(\partial_t\pm\partial_x)F(u_\omega,v_\omega,Du_\omega,Dv_\omega)(t-\tilde t)\right\|_{L^2_{\tilde t,x}}^2.
\end{aligned}$$

が成立．また，$r<2s-1$と$[\Box,P]$はオーダー0であることから，

$$\left\|a_\delta(\tilde t)\Lambda_{\tilde t,x}^{r-2}[\Box,P]u_{\omega,\pm}(t-\tilde t)\right\|_{L^2_{\tilde t,x}}^2<\infty.$$

補題 4.1 と三角不等式より，$\delta < T$, $|t| < T - \delta$, $r < 2s - 1$ に対して，

$$\left\| a_\delta(\tilde{t}) \Lambda_{\tilde{t},x}^{r-2} P(\partial_t \pm \partial_x) A(u_\omega, v_\omega)(t - \tilde{t}) \right\|_{L^2_{\tilde{t},x}}^2 \tag{4.14}$$
$$\leq \left(C_1 \left\| a_\delta(\tilde{t}) \Lambda_{\tilde{t},x}^{r-1} P u_{\omega,\pm}(t - \tilde{t}) \right\|_{L^2_{\tilde{t},x}} + C_2 \left\| a_\delta(\tilde{t}) \Lambda_{\tilde{t},x}^{r-1} P v_{\omega,\pm}(t - \tilde{t}) \right\|_{L^2_{\tilde{t},x}} + C_3 \right)^2$$
$$\leq C_4 E(t; u_\omega, v_\omega) + C_5.$$

ここで，C_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ は $\|u\|_{X^s}$, $\|v\|_{X^s}$, $\|u\|_{Y^s_T}$, $\|v\|_{Y^s_T}$ に依存する正定数である．従って，$\delta < T$, $|t| < T - \delta$ に対して

$$\frac{dE(t; u_\omega, v_\omega)}{dt} \leq C_1' E(t; u_\omega, v_\omega) + C_2'$$

を得る．ただし，C_1', C_2' は $\|u\|_{X^s}$, $\|v\|_{X^s}$, $\|u\|_{Y^s_T}$, $\|v\|_{Y^s_T}$ に依存する正定数．さらに，グロンウォールの不等式を用いれば，

$$E(t, u_\omega, v_\omega) \leq e^{C_1' t} \left\{ E(0, u_\omega, v_\omega) + \frac{C_2'}{C_1'}(1 - e^{-C_1' t}) \right\} \tag{4.15}$$

が成り立つ．ここで，簡単な計算により，

$$E(0, u_\omega, v_\omega) \leq C E(0, u, v), \quad \lim_{\omega \to 0} E(t; u_\omega, v_\omega) = E(t; u, v)$$

が成り立つので，$\delta < T$, $|t| < T - \delta$ に対して

$$E(t; u, v) \leq e^{C_1' t} \left\{ C E(0, u, v) + \frac{C_2'}{C_1'}(1 - e^{-C_1' t}) \right\} < \infty$$

を得る (仮定より $E(0, u, v) < \infty$ であることに注意しよう)．よって，$|t| < T - \delta$, $r < 2s - 1$ のとき，$Pu_\pm, Pv_\pm \in H^{r-1}$ が成り立つ．ここで，$\delta > 0$ を十分小さくとれば結論を得る． ∎

参考文献

[1] M. Beals, *Spreading of singularities for a semilinear wave equation*, Duke Math. J. **49** (1982), 275-286.

[2] M. Beals, *Self-spreading and strength of singularities for solutions to semilinear wave equations*, Annals of Math. **118** (1983), 187-214.

[3] M. Beals, *Propagation of Smoothness for Nonlinear Second-Order Strictly Hyperbolic Differential Equations*, Proc. Symp. Pure. Math. **43** (1985), 21-44.

[4] M. Beals, and M. Reed, *Propagation of singularities for hyperbolic pseudo differential operators with non-smooth coefficients*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 169-184.

[5] J. M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux derivées partielles nonlineaires*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **14** (1981), 209-246.

[6] L. Hörmander, *Linear differential operators*, Actes. Congr. Inter. Math. Nice **1** (1970), 121-133.

[7] S. Ito, *Propagation of singularities for semilinear wave equation with nonlinearity satisfying null condition*, SUT Journal of Mathematics, Vol. **41**, No.2 (2005), 197-204.

[8] S. Ito, *Propagation of singularities for semi-linear wave equations with nonlinearity satisfying the null condition*, J.Hyperbolic Differ.Equ, **4**, no.2 (2007), 197-205.

[9] S.Ito and K. Kato, *Propagation of singularities for a system of semilinear wave equations with null condition*, SUT Journal of Mathematics, Vol. **44**, No.2 (2008), 265-288

[10] S. Klainerman, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations*, Nonlinear systems of partial differential equations in applied mathematics, Part 1, 293-326, Lectures in Appl. Math., 23.

[11] S. Klainerman and M. Machedon, *Space-Time Estimates for Null Forms and the Local Existence Theorem*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 1221-1268.

[12] L. Linqi, *Propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations*, Canad. J .Math. Vol. **45** (4) (1993), 835-846.

[13] Fayez H.Michael, *Propagation of smoothness for systems of nonlinear second order strictly hyperbolic differential equations*, Bull. Fac. Sci. Alex. Univ. Vol. **36**, No.1 (1996), 41-46.

[14] J. Rauch, *Singularities of solutions to semilinear wave equations*, J. Math. Pures et Appl. **58** (1979), 299-308.

[15] J. Rauch and M. Reed, *Nonlinear microlocal analysis of semilinear hyperbolic systems in one space dimension*, Duke Math.J. **49** (1982), 397-475

[16] M. Reed, *Propagation of Singularities for Nonlinear Wave Equations in One Dimension*, Comm. P.D.E, (3), (1978), 153-199.